

PRILOG RAZUMIJEVANJU TEORIJA ČVRSTOĆE

A CONTRIBUTION TO THE UNDERSTANDING OF FAILURE THEORIES

Branimir Markulin Grgić, Vladimir Markulin Grgić, Miroslav Radaković, Ante Zaninović

Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, 10000 Zagreb, Hrvatska

SAŽETAK

Jedna od osnovnih zadaća inženjera konstruktora je dimenzioniranje. Tri su kriterija dimenzioniranja: čvrstoća, krutost i stabilnost. Prema kriteriju čvrstoće naprezanje niti na jednom mjestu ne smije biti veće od dopuštenog naprezanja za dani materijal i vrstu opterećenja. Naprezanje je unutarnja sila raspodijeljena po jedinici površine tijela. Svaka konstrukcija je dimenzionirana za neko opterećenje. Opterećenje predstavljaju vanjske sile i momenti koji na nju djeluju. Kritična mjesta konstrukcije su mjesta s najvećim naprezanjima te tamo valja kontrolirati čvrstoću.

Lako je zaključiti zadovoljava li čvrstoća na kritičnom mjestu u slučaju jednoosnog stanja naprezanja, npr. kao kod normalnog naprezanja pri vlaklu ili pri čistom savijanju - samo treba proračunsko naprezanje usporediti s dopuštenim za taj materijal i tu vrstu opterećenja. Problem se javlja kod dvoosnih i troosnih stanja naprezanja, uzrokovanih složenim opterećenjima. Trebalo bi eksperimentalno utvrditi kritično naprezanje za sve moguće kombinacije $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$.

Smisao teorija čvrstoće je predviđanje pojave kritičnog stanja konstrukcijskog elementa usporedbom proračunskog stanja naprezanja u promatranom elementu sa mehaničkim svojstvima materijala (vlačna čvrstoća ili naprezanje tečenja) od kojeg je element izrađen, a koje je lako odrediti pomoću kidalice u laboratoriju, izlaganjem testne epruvete aksijalnom opterećenju. Teorije čvrstoće predviđaju pojavu kritičnog stanja (tečenje ili lom) u slučaju složenog statičkog opterećenja.

Ključne riječi: teorija čvrstoće, kritično stanje, glavna naprezanja, duktilni materijali, krhki materijali

ABSTRACT

One of the basic tasks of a mechanical engineer is designing. There are three designing criteria: strength, stiffness and stability. According to the strength criterion, the stress may at no point be higher than the permissible stress for the given material and type of load. Stress is an internal force distributed per unit area of the body. Each construction is designed for a certain load. The load is represented by external forces and moments acting on it. The critical points of the construction are the places with the highest stresses, and that is where strength should be controlled.

It is easy to determine whether the strength is satisfactory in the case of a uniaxial state, for example, as in tensile load or pure bending – all that is needed is to compare the calculated stress with the allowable one for that material and that type of load. The problem occurs with biaxial and triaxial stress states, caused by complex loads. The critical stress should be determined experimentally for all possible combinations $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$.

The meaning of strength theories is to predict the occurrence of the critical state of a structural element by comparing the actual state of stress in the observed element with the mechanical properties of the material (tensile strength or yield strength) the element is made of, which can be easily determined with the help of a tensile testing machine in the laboratory, by exposing the test specimen to axial load. Strength theories predict the failure occurrence in the case of complex static loading.

Keywords: failure theory, failure, principal stresses, ductile materials, brittle materials

1. UVOD

1. INTRODUCTION

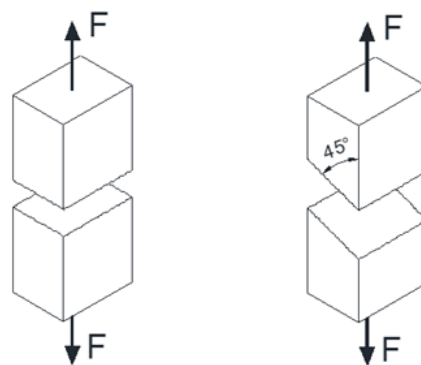
Stanje naprezanja u nekoj točki može se opisati pomoću glavnih naprezanja pa je većina teorija naprezanja funkcija glavnih naprezanja i mehaničkih svojstava materijala od kojeg je konstrukcijski dio izrađen (vlačna čvrstoća i naprezanje tečenja):

Osnovna podjela materijala s obzirom na mogućnost deformacije je na krhke i duktilne materijale. Međutim, duktilnost i krhkost nisu apsolutne kategorije materijala. Naprimjer, volfram je krhak na sobnoj temperaturi, a duktilan na povišenoj temperaturi. Nadalje, neki materijali koji su duktilni na sobnoj temperaturi, postaju krhki na nižim temperaturama (neki vojni povjesničari smatraju da je Napoleonova vojska pretrpjela velike gubitke u pohodu na Rusiju zbog toga što su kositreni gumbi na uniformama postali krhki na niskim temperaturama te su pucali, što je uzrokovalo smrzavanje vojnika). Krhki materijali se samo elastično deformiraju (plastična deformacija je zanemariva) te ako se pretjera s opterećenjem dolazi do loma bez ikakvog upozorenja (Slika 1).

Kod duktilnih materijala se nakon elastične deformacije, ako je opterećenje dovoljno veliko, javlja velika plastična deformacija pa tek onda nastupa lom. Plastična deformacija ukazuje na prekomjerno opterećenje konstrukcijskog elementa. Tog upozorenja nema kod krhkih materijala.

Kritično stanje za krhke materijale je pojava loma, a za duktilne materijale pojava tečenja (plastične deformacije) [1].

Kod krhkih materijala lom se javlja u ravnini okomitoj na glavno normalno naprezanje σ_1 , koje je lom i uzrokovalo (slika 1). Kod duktilnih materijala lom nastaje u ravnini najvećeg posmičnog naprezanja τ_{\max} koja je pod kutom od 45° u odnosu na glavna naprezanja; tečenje ne izaziva naprezanje tečenja R_e već maksimalna posmična naprezanja koja se javljaju pri naprezanju tečenja.



Lom krhkog štapa

Lom duktilnog štapa

Slika 1 U slučaju vlačnog opterećenja lom krhkog štapa uzrokovan je normalnim, a duktilnog tangencijalnim naprezanjem

Figure 1 In the case of tensile load, the fracture of a brittle rod is caused by normal stress and of a ductile rod by tangential stress

S obzirom na to da je potrebno postići određenu sigurnost u odnosu na kritično stanje, tečenje ili lom, reducirano (ekvivalentno) naprezanje kod svih teorija čvrstoće mora biti manje od dopuštenog naprezanja u slučaju jednoosnog stanja naprezanja (σ_{dop} ili τ_{dop}).

U slučaju statičkog opterećenja, kada se opterećenje ne mijenja u vremenu, izrazi za dopušteno naprezanje vrlo su jednostavni:

$$\sigma_{dop} = \frac{R_e}{S} \text{ (za duktilne materijale) i}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{R_m}{S} \text{ (za krhke materijale),}$$

pri čemu je:

σ_{dop} [MPa] – dopušteno naprezanje

R_e [MPa] – granica tečenja (granica razvlačenja)

R_m [MPa] – vlačna čvrstoća

S – faktor sigurnosti

Granica tečenja i vlačna čvrstoća su kritične vrijednosti naprezanja eksperimentalno dobivene statičkim vlačnim pokusom na kidalici te prikazane dijagramom naprezanje – deformacija.

Za krhke materijale mjerodavna je vlačna čvrstoća, to je normalno naprezanje kod kojeg dolazi do loma, na kraju elastične deformacije. Dopušteno naprezanje dobijemo tako da vlačnu čvrstoću podijelimo sa sigurnošću, koja za slučaj statičkog

opterećenja iznosi $S = 1,5$ do $2,5$ (...4). [4]

Za duktilne materijale mjerodavno je naprezanje tečenja, normalno naprezanje pri kojem se testna epruveta počinje produljivati uz privremeno smanjenje naprezanja [3]. Dopušteno naprezanje dobijemo tako da naprezanje tečenja podijelimo sa sigurnošću, koja za slučaj statičkog opterećenja iznosi $S = 1,2$ do 2 . [4]

2. SFERNA I DEVIJATORSKA KOMPONENTA TENZORA NAPREZANJA

2. HYDROSTATIC AND DEVIATORIC COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR

Teorije čvrstoće višeosno stanje naprezanja reduciraju na jednoosno, što omogućuje usporedbu tog reduciranog (ekvivalentnog) naprezanja s dopuštenim normalnim naprezanjem te izvođenje zaključka zadovoljava li čvrstoća ili ne.

Svako stanje naprezanja možemo rastaviti na sfernu i devijatorsku komponentu. Sferna izaziva samo promjenu obujma (zato se još naziva hidrostatičkom komponentom), a devijatorska samo promjenu oblika, tj. distorziju.

Sferna komponenta matrice naprezanja jednaka je srednjoj vrijednosti normalnih naprezanja bez obzira na orijentaciju presjeka tj. koordinatnog sustava (prva invarijanta tenzora naprezanja):

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

pri čemu je:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ [MPa] – najveća glavna naprezanja
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ [MPa] – normalne komponente naprezanja u smjerovima osi x,y i z

Pokusi su pokazali da su uzrok tečenja samo naprezanja koja izazivaju promjenu oblika, a to su tangencijalna naprezanja. Normalna naprezanja izazivaju duljinsku (volumnu) deformaciju, a tangencijalna naprezanja izazivaju kutnu deformaciju.

Matrica sfernog naprezanja (hidrostatička komponenta matrice naprezanja):

$$[\sigma_{ij}^o] = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix}$$

Matricu devijatorskog naprezanja dobivamo oduzimanjem matrice sfernog naprezanja od matrice naprezanja:

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_{ij}^o] = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{bmatrix}$$

pri čemu je:

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$, [MPa] – posmične komponente naprezanja

Dakle stanje naprezanja u bilo kojoj točki tijela (konstrukcijskog elementa) možemo prikazati kao zbroj sfernog i devijatorskog naprezanja; to možemo učiniti koristeći glavna naprezanja ili koristeći proizvoljnu orijentaciju presjeka u promatranoj točki:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_1 - \sigma_o) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_o) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_o) \end{bmatrix}$$

ili

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{bmatrix}$$

Kada je o duktilnim materijalima riječ, bitna je spoznaja da sferna komponenta matrice naprezanja ne izaziva tečenje materijala (plastičnu deformaciju).

3. TEORIJA NAJVEĆEG NORMALNOG NAPREZANJA (RANKINEOVA TEORIJA)

3. THE MAXIMUM NORMAL STRESS THEORY (RANKINE THEORY)

Prema toj teoriji do kritičnog stanja će doći kada jedno glavno naprezanje dosegne vrijednost vlačne čvrstoće ili naprezanja tečenja. Dakle, mjerodavno je ono koje je najveće po apsolutnoj vrijednosti. Metoda se nije pokazala dobrom za duktilne materijale jer je za njih mjerodavno maksimalno posmično naprezanje (uzrokuje tečenje materijala). Za krhke materijale daje dobre rezultate u području vlakla. Za ravninsko stanje naprezanja to je područje prvog kvadranta (slika 2). Za druge kombinacije glavnih naprezanja (vlak-tlak, tlak) bolja je Mohrova teorija. Zbog njene kompliciranosti najčešće se koristi modificirana Mohrova teorija i Coulomb-Mohrova teorija.

Za duktilne materijale kritično stanje predstavlja pojava tečenja ($\sigma_{kr}=R_e$), a za krhke lom ($\sigma_{kr}=\sigma_M$).

pri čemu je:

σ_{kr} [MPa] – kritično naprezanje

σ_M [MPa] – najveće naprezanje

Uvjet čvrstoće za ovu teoriju glasi:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$$

pri čemu je:

σ_{ekv} [MPa] – ekvivalentno naprezanje

σ_{max} [MPa] – stvarno glavno naprezanje koje je najveće po apsolutnoj vrijednosti

U slučaju različite vlačne i tlačne čvrstoće materijala:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{vl dop}, |\sigma_3| \leq \sigma_{tl dop}$$

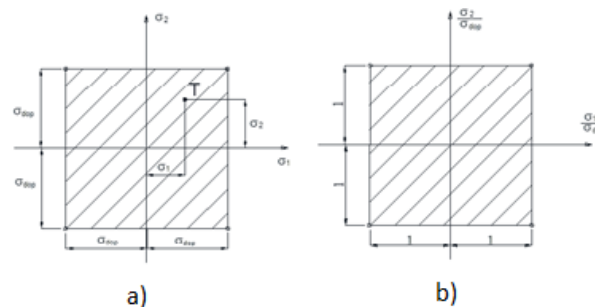
pri čemu je:

$\sigma_{vl dop}$ [MPa] – dopušteno vlačno naprezanje

$\sigma_{tl dop}$ [MPa] – dopušteno tlačno naprezanje

Na slici 2 prikazane su krivulje čvrstoće za slučaj ravninskog (dvoosnog) stanja naprezanja za krhki materijal s različitim vlačnom i tlačnom čvrstoćom. Krhke materijale odlikuje znatno veća tlačna nego vlačna čvrstoća. Kao što je već

rečeno, daje zadovoljavajuće rezultate samo u prvom kvadrantu.



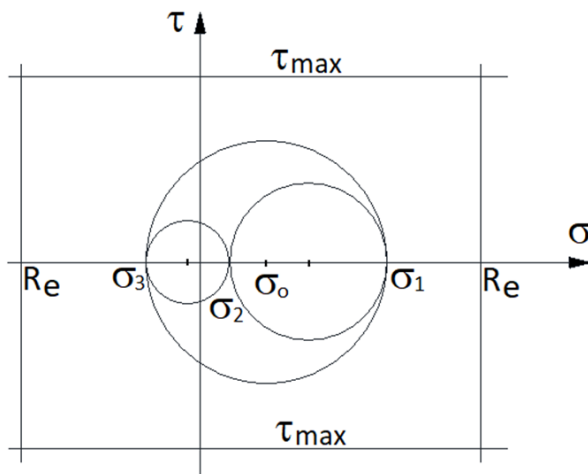
Slika 2 Krivulje čvrstoće za dvoosno stanje naprezanja (drugi prikaz je u bezdimenzijskom koordinatnom sustavu)

Figure 2 Strength curves for the biaxial stress state (the second view is in the dimensionless coordinate system)

3.1. OBJAŠNJENJE NEPRIMJERENOSTI TEORIJE NAJVEĆEG NORMALNOG NAPREZANJA ZA DUKTILNE MATERIJALE

Kada je o duktilnim materijalima riječ, teorija najvećeg normalnog naprezanja nije u skladu s opažanjem da je tečenje tj. plastična deformacija neovisna o sfernom (hidrostatičkom) naprezanju, tj. ovisi samo o devijatorskom naprezanju.

Slika 3 dokazuje neprikladnost ove teorije za duktilne materijale: klizanjem iste Mohrove kružnice duž apscise dolazi se do granice tečenja, a maksimalno tangencijalno naprezanje u navedenom primjeru je u svim položajima Mohrove kružnice manje od maksimalnog tangencijalnog naprezanja kod kojeg dolazi do tečenja kod pokusa na kidalici (na slici 3 prikazano horizontalnim pravcima τ_{max}). To što se sferno (hidrostatičko) naprezanje σ_0 mijenja klizanjem Mohrove kružnice nije bitno, tangencijalno naprezanje je u svim položajima isto. Valja napomenuti da predznak posmičnog naprezanja na Mohrovoj kružnici nije očit, pozitivan je kada zakreće element u smjeru kazaljke na satu, a negativan u obrnutom slučaju. To je u suprotnosti s općenitim dogovorom o pozitivnom predznaku svih posmičnih naprezanja. Predznaci normalnih naprezanja su uobičajeni - pozitivni za vlak, negativni za tlak.



Slika 3 Objašnjenje neprimjerenosti teorije najvećeg normalnog napreznja za duktilne materijale

Figure 3 Explanation of the inadequacy of the maximum normal stress theory for ductile materials

4. TEORIJA NAJVEĆEG POSMIČNOG NAPREZNJA (TRESCINA TEORIJA)

4. MAXIMUM SHEAR STRESS THEORY (TRESCA THEORY)

Ova teorija predviđa kritično stanje konstrukcijskog elementa izrađenog od duktilnog materijala. Prema njoj kritično stanje nastupa kada maksimalno posmično napreznje dosegne vrijednost koja se javlja kod aksijalnog vlačnog napreznja u trenutku pojave tečenja.

$$\tau_{max} = \tau_{teč}$$

pri čemu je:

τ_{max} [MPa] – maksimalno posmično napreznje

$\tau_{teč}$ [MPa] – posmično napreznje u trenutku pojave tečenja

Ova teorija je u suglasju s opažanjem da hidrostatsko napreznje ne utječe na tečenje. Za Trescinu teoriju položaj Mohrove kružnice na apscisi nije važan, bitan je samo polumjer koji odgovara najvećem tangencijalnom napreznju. Ako je razlika između glavnih napreznja mala, taj polumjer, tj. tangencijalno napreznje bit će maleno pa neće doći do tečenja materijala tj. plastične deformacije bez obzira na velika normalna napreznja.

S obzirom na to da je na Mohrovoj kružnici maksimalno posmično napreznje jednako polovici algebarske razlike dvaju po apsolutnoj vrijednosti najvećih glavnih napreznja, vrijedi:

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2,$$

a $\tau_{teč}$ je po iznosu upola manji od $\sigma_{teč}$ (vidi Mohrovu kružnicu) pa je i dopušteno posmično napreznje τ_{dop} upola manje od σ_{dop} te vrijedi:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sigma_{dop} / 2.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi konačni izraz za ekvivalentno (reducirano) napreznje prema teoriji najvećeg posmičnog napreznja:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{dop}$$

U slučaju dvoosnog (ravninskog) stanja napreznja, jedno glavno napreznje jednako je nuli. Tradicionalno se kod dvoosnog stanja napreznja ono glavno napreznje koje je jednako nuli označava kao σ_3 , iako je to u nesuglasju s dogovorom prema kojem je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$!

Moguća su tri slučaja (slika 3):

Slučaj 1: preostala dva glavna napreznja veća su od nule

$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ pa slijedi:

$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$, pri čemu je $\sigma_{max} = \sigma_1$ ili σ_2 , ovisno o tome koje napreznje je većeg iznosa.

Slučaj 2: glavna napreznja suprotnog su predznaka

$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{dop}$ (za $\sigma_1 > 0$)

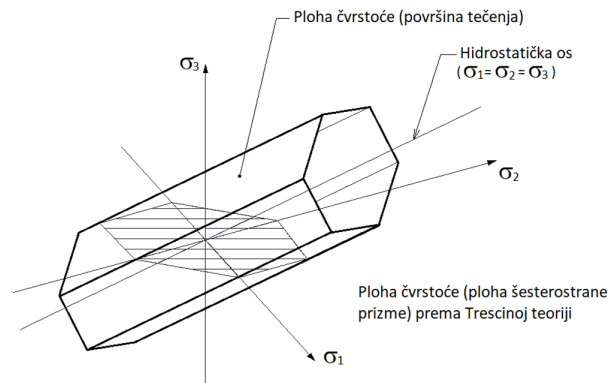
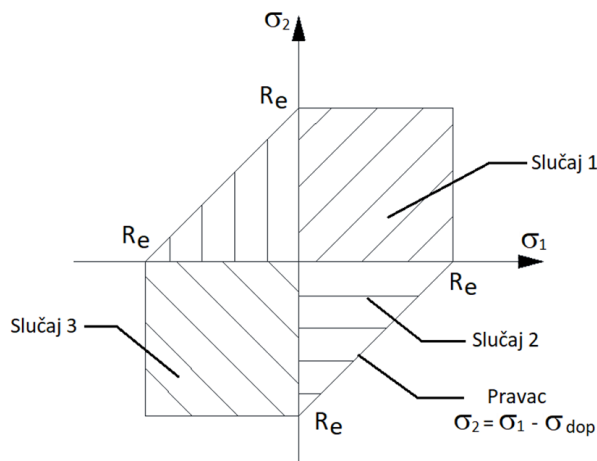
$\sigma_{ekv} = \sigma_2 - \sigma_1 \leq \sigma_{dop}$ (za $\sigma_2 > 0$)

Slučaj 3: preostala dva glavna napreznja manja su od nule

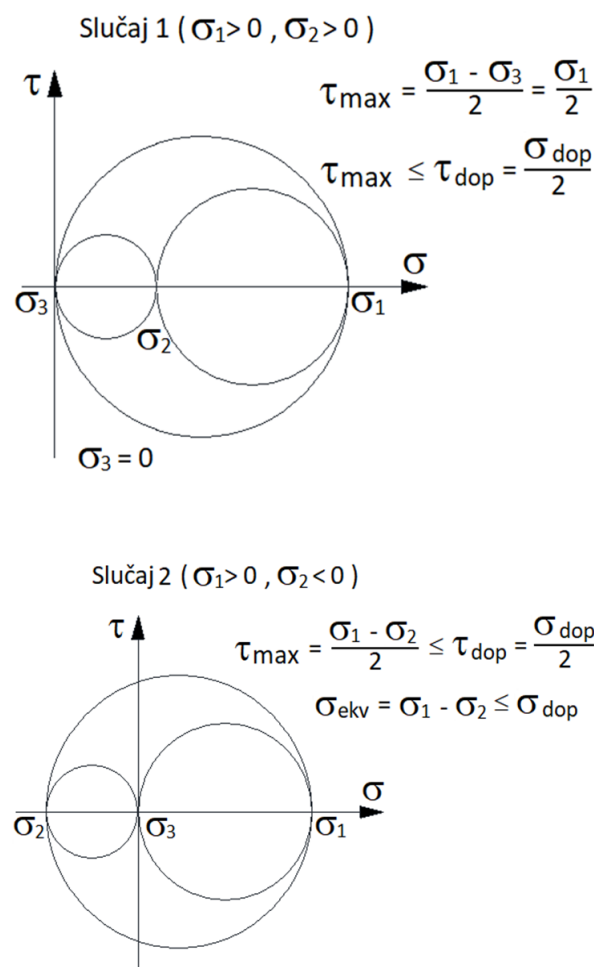
$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0$

$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$, pri čemu je $\sigma_{max} = \sigma_1$ ili σ_2 , ovisno o tome koje napreznje je većeg apsolutnog iznosa.

Krivulja čvrstoće (tečenja) za dvoosno tj. ravninsko stanje napreznja:



Slika 5 Plohe čvrstoće prema Trescinoj teoriji
Figure 5 Strength surfaces according to Tresca's theory



Slika 4 Krivulja čvrstoće po Trescinoj teoriji (prvi crtež) i Mohrove kružnice za prikaz najvećeg tangencijalnog naprezanja

Figure 4 Strength curve according to Tresca's theory (first drawing) and Mohr's circles to show the highest tangential stress

Ploha čvrstoće (tečenja) za troosno tj. prostorno stanje naprezanja:

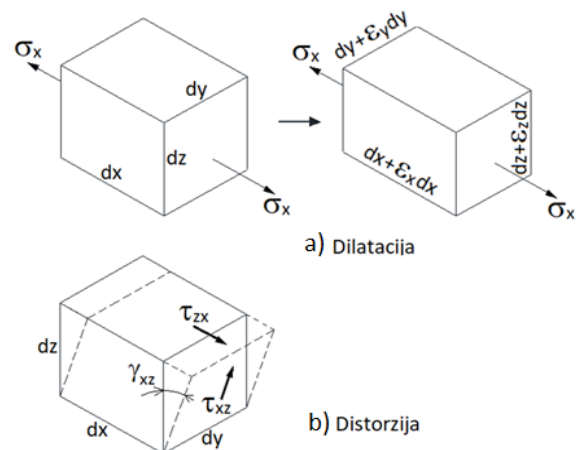
Na slikama 4 i 5 granične krivulje i plohe ne predstavljaju dopušteno naprezanje već naprezanje tečenja R_e , koje predstavlja pojavu kritičnog stanja za duktilne materijale.

5. TEORIJA NAJVEĆE DISTORZIJSKE ENERGIJE (HMH TEORIJA)

5. DISTORTION-ENERGY THEORY (HMH THEORY)

Distorzijska energija je onaj dio energije deformiranja koji je povezan s devijatorskom komponentom naprezanja, s promjenom oblika. Riječ je također o teoriji koja se primjenjuje kod duktilnih materijala. Prema toj teoriji do kritičnog stanja (tečenja) dolazi kada distorzijska energija kod višeosnog stanja naprezanja dosegne vrijednost distorzijske energije pri kojoj nastupa tečenje kod jednoosnog vlačnog pokusa na kidalici.

Energija deformiranja



Slika 6 Prikaz naprezanja koja uzrokuju distorziju i dilataciju
Figure 6 View of stresses that cause distortion and dilatation

Energija deformiranja je vid potencijalne energije pohranjene u elastično deformiranom materijalu, ujedno predstavlja rad unutarnjih sila. Dijeli se na dilatacijsku i distorzijsku energiju.

Na element sa slike 6, s normalnim naprezanjem σ_x , djeluju dvije vlačne sile $\sigma_x dydz$. Te sile produlje element za $\varepsilon_x dx$.

Rad unutarnjih sila u tom slučaju iznosi:

$$dW = dU = (\sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx) / 2 = (\sigma_x \varepsilon_x dV) / 2,$$

gdje je $dV = dx dy dz$.

pri čemu je:

ε_x - relativna duljinska deformacija u smjeru osi x
 dx, dy, dz [mm] – diferencijali koordinata
 dV [mm³] – diferencijal volumena

Izraz je podijeljen s dva jer sila raste linearno od nule do maksimalne vrijednosti.

Gustoću energije deformiranja dobijemo dijeljenjem gornjeg izraza s dV :

$$U_0 = (\sigma_x \varepsilon_x) / 2$$

Na slici 6 b prikazan je element s posmičnim naprezanjem τ_{xz} (τ_{zx}) na koji djeluju četiri sile - dvije horizontalne i suprotno usmjerene na donjoj i gornjoj strani elementa ($\tau_{xz} dx dy$) te dvije vertikalne i suprotno usmjerene na bočnim stranama ($\tau_{zx} dy dz$). Ako zamislimo da je donja strana vezana za okolinu onda je nepomična te donja sila ne vrši rad. Bočne sile također ne vrše rad jer je pomak bočnih strana okomit na smjer djelovanja bočnih sila.

Dakle, rad vrši samo gornja sila $\tau_{xz} dx dy$:

$$dW = dU = (\tau_{xz} dx dy \gamma_{xz} dz) / 2, \text{ gdje je } \gamma_{xz} dz \text{ pomak gornje strane elementa.}$$

pri čemu je:

γ_{xz} – kutna deformacija

Gustoća energije deformiranja iznosi:

$$dU_0 = (\tau_{xz} \gamma_{xz}) / 2.$$

Zaključujemo da naprezanje σ_x obavlja rad vezan uz relativnu deformaciju ε_x , σ_y uz relativnu deformaciju ε_y i σ_z uz relativnu deformaciju ε_z . Analogno tome, τ_{xz} obavlja rad vezan uz kutnu

deformaciju γ_{xz} itd.

Potencijalna energija elastično deformiranog elementa, tj. rad unutarnjih sila iznosi:

$$dW = dU = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV / 2,$$

pri čemu je:

γ_{xy}, γ_{zx} – kutna deformacija

a gustoća energije deformiranja:

$$U_0 = U / dV = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) / 2.$$

Hookeov zakon povezuje deformaciju i naprezanje te gustoću energije možemo izraziti kao funkciju samo naprezanja ili kao funkciju samo deformacije.

Ako gustoću energije deformiranja izrazimo kao funkciju naprezanja, uz proizvoljno izabranu orijentaciju koordinatnog sustava:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

pri čemu je:

E [MPa] – modul elastičnosti

G [MPa] – modul smika

ν – Poissonov omjer

Logično je da gustoća energije deformiranja ne ovisi o orijentaciji koordinatnog sustava pa ako izaberemo koordinatni sustav čije osi se podudaraju s pravcima glavnih naprezanja:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (1)$$

Dilatacijska i distorzijska energija

Uvrštavanjem komponenti sfernog tenzora naprezanja u izraz (1) dobivamo gustoću dilatacijske (hidrostatičke) energije deformiranja U_{0h} .

$$U_{0h} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_o^2 \quad (2)$$

Gustoću distorzijske energije deformiranja dobivamo tako da od ukupne gustoće energije

deformiranja oduzmemo gustoću hidrostatičke energije:

$$U_{od} = U_o - U_{oh} \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza za U_o i U_{oh} u izraz (3) dobivamo:

$$U_{od} = \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{GE} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4)$$

Sređivanjem izraza (4) dobivamo:

$$\begin{aligned} U_{od} &= \frac{1+\nu}{GE} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{1}{3G} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \end{aligned} \quad (5)$$

pri čemu je:

τ_1, τ_2, τ_3 , [MPa] – najveća posmična naprezanja

$E = 2G(1 + \nu)$ (međuovisnost Youngovog i Coulombovog modula)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (\sigma_1 - \sigma_2) / 2, & \tau_2 &= (\sigma_2 - \sigma_3) / 2, \\ \tau_3 &= (\sigma_3 - \sigma_1) / 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Izrazi (6) proizlaze iz izraza za maksimalno posmično naprezanje dobivenog promatranjem Mohrove kružnice (ravninsko stanje naprezanja):

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7)$$

S obzirom na to da računamo s glavnim normalnim napreznjima, tangencijalna napreznja jednaka su nuli.

Uvjet čvrstoće prema teoriji najveće distorzijske energije:

$$U_{od} \leq U_{od, dop} \quad (8)$$

$U_{od, dop}$ predstavlja dopuštenu gustoću distorzijske energije kod jednoosnog stanja napreznja. Kada u izraz (5) uvrstimo $\sigma_1 = \sigma_{dop}$, $\sigma_2 = 0$ i $\sigma_3 = 0$:

$$U_{od, dop} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{dop}^2 \quad (9)$$

Kada u izraz (8) uvrstimo izraze (9) i (5):

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{i} \leq 2\sigma_{dop}^2 \quad (10)$$

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{dop}$$

U slučaju dvoosnog stanja napreznja:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_{dop} \quad (11)$$

Čest slučaj opterećenja u inženjerskoj praksi jest istovremeno savijanje i uvijanje okruglih štapova. Tipičan primjer takvog složenog opterećenja su vratila.

U tom slučaju, kada na poprečnom presjeku štapa djeluje normalno naprezanje uzrokovano savijanjem i posmično naprezanje uzrokovano uvijanjem, na poprečnom presjeku maksimalno vlačno i maksimalno tlačno naprezanje djeluju u točkama međusobno kutno udaljenima za 180°. Riječ je o točkama koje su najudaljenije od osi poprečnog presjeka oko koje djeluje savojni moment, ta os prolazi težištem poprečnog presjeka. Maksimalno posmično naprezanje konstantno je duž cijelog oboda poprečnog presjeka.

Izrazi koji slijede vrijede za materijale iste vlačne i tlačne čvrstoće (poput konstrukcijskog čelika). Izraz za glavna napreznja u točki A u kojoj djeluje maksimalno tlačno naprezanje i maksimalno tangencijalno naprezanje (koje je isto u svim točkama na obodu poprečnog presjeka):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad (12)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (-\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

Izraz za glavna napreznja u točki B u kojoj djeluje maksimalno vlačno naprezanje i maksimalno tangencijalno naprezanje:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad (13)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

Izrazi (12) i (13) proizlaze iz općeg izraza za glavna napreznja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14)$$

Uvrštavanjem izraza (12) i (13) u izraz (11) te

sređivanjem tog izraza dobijemo:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{dop} \quad (15)$$

Izraz (15) često se koristi u inženjerskoj praksi, ne samo u slučaju kombinacije savojnog i torzijskog opterećenja (npr. vratila) već i u slučaju bilo koje kombinacije opterećenja koja uzrokuje normalna i tangencijalna naprezanja na istom presjeku (npr. proračun zavara). Normalna naprezanja mogu biti uzrokovana čistim vlačnim ili tlačnim opterećenjem i savijanjem, dok tangencijalna naprezanja mogu biti uzrokovana smicanjem i torzijom.

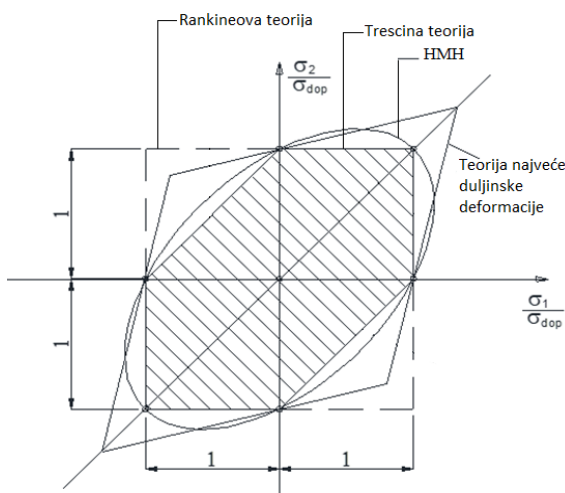
6. USPOREDBA TEORIJA ČVRSTOĆE

6. COMPARISON OF FAILURE THEORIES

Slika 7 prikazuje krivulje čvrstoće za teorije čvrstoće obrađene u ovom radu (dodana je i krivulja čvrstoće za teoriju najveće duljinske deformacije). Zorno se vidi da se područje sigurnosti prema Trescinoj teoriji (šrafrano područje) nalazi unutar granica područja sigurnosti svih ostalih teorija.

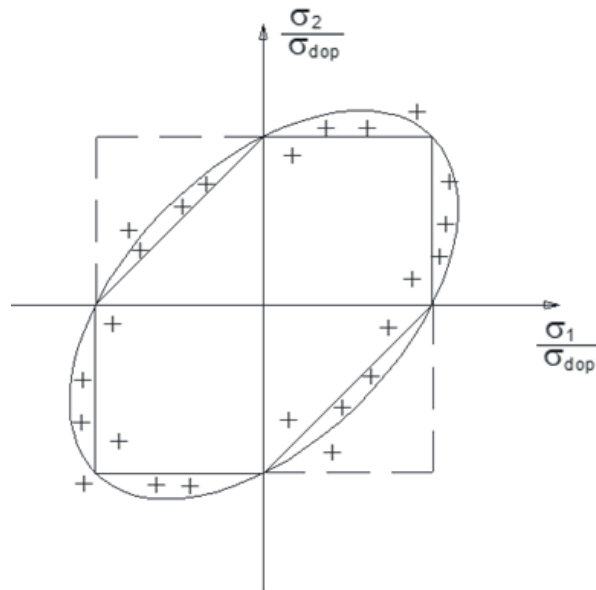
Dakle, kao što pokazuje slika 8 na kojoj su prikazani eksperimentalni rezultati u odnosu na teorije čvrstoće, teorija najveće distorzijske energije je najbliža eksperimentalnim rezultatima, ali Trescina teorija je konzervativnija tj. na strani je sigurnosti.

Za duktilne materijale, kao što je već spomenuto, Trescina i HMH teorija daju dobre rezultate, dok krhki materijali dobro slijede teoriju najvećeg normalnog naprezanja.



Slika 7 Krivulje prema različitim teorijama čvrstoće

Figure 7 Curves according to different strength theories



Slika 8 Prikaz eksperimentalnih rezultata u odnosu na različite teorije čvrstoće [2]

Figure 8 Presentation of experimental results in relation to different strength theories [2]

7. ZAKLJUČAK

7. CONCLUSION

Za duktilne materijale kritično stanje predstavlja pojava tečenja. Za njih Trescina i HMH teorija daju dobre rezultate, što je dokazano mnogim laboratorijskim ispitivanjima. Trescina teorija je praktičnija i konzervativnija od HMH teorije koja se bolje podudara s eksperimentalnim podacima [2]. Kako je u inženjerskoj praksi sigurnost iznimno važna, to što je Trescina teorija konzervativna tj. na strani sigurnosti, ne predstavlja nedostatak.

Za krhke materijale kritično stanje predstavlja pojava krhkog loma, kojeg uzrokuje normalno naprezanje. Teorija najvećeg normalnog naprezanja daje dobre rezultate samo u području vlaka. Na primjeru usporedbe krivulja čvrstoće za dovoosno stranje naprezanja, u četvrtom kvadrantu, u kojem su glavna naprezanja suprotnog predznaka, Coulomb-Mohrova teorija daje puno bolje rezultate od teorije najvećeg normalnog naprezanja, ali još bolje rezultate daje modificirana Mohrova teorija. U području vlaka sve tri teorije (teorija najvećeg normalnog naprezanja, Coulomb-Mohrova i modificirana Mohrova) se podudaraju.

8. REFERENCE

8. REFERENCES

- [1.] J. Brnić: Nauka o čvrstoći. ISBN 86-03-00500-1. Školska knjiga, 1991.
- [2.] I. Alfrević: Nauka o čvrstoći 1. ISBN 953-172-010-X. Zagreb: Tehnička knjiga, 1995.
- [3.] M. Franz: Mehanička svojstva materijala. ISBN 953-6313-23-5. FSB, 1998.
- [4.] B. Križan: Osnove proračuna i oblikovanja konstrukcijskih elemenata. ISBN 978-953-0-31691-1. Školska knjiga, 2008.
- [5.] J. P. Den Hartog: Strength of Materials. ISBN-0-486-60755-0. Dover Publications, 1977.

AUTORI • AUTHORS



• **Branimir Markulin Grgić** – rođen je 1969. u Zagrebu, gdje je završio Klasičnu gimnaziju te diplomirao na konstrukcijskom smjeru Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Radio je u Croscu, u

Odjelu za projektiranje, gdje je vodio remontne radove na bušačim postrojenjima u zemlji i inozemstvu. Od 2009. do 2016. Radio je kao asistent u Zavodu za konstruiranje FSB-a. Od 2016. Predavač je na Tehničkom Veleučilištu u Zagrebu gdje izvodi nastavu iz kolegija Mehanika, Čvrstoća, Mehanizmi, Konstruiranje primjenom računala i Dizajn proizvoda. Bio je suradnikom na nekoliko europskih projekata iz područja obnovljivih izvora energije. Otac je troje djece.

Korespondencija • Correspondence

bmarkulin@tvz.hr



• **Vladimir Markulin Grgić** – rođen je 1969. u Zagrebu, gdje je završio Klasičnu gimnaziju te diplomirao na konstrukcijskom smjeru Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Pola godine radio je

u njemačkoj istraživačkoj tvrtki Magnet-Motor, a potom u Brodarskom institutu. Od 2008. radi u Novamini, d. o. o., na europskim projektima. Naslovni je asistent (vanjski suradnik) na Zavodu

za konstruiranje gdje je izvodio vježbe iz kolegija Elementi konstrukcija. Otac je dvoje djece.

Korespondencija • Correspondence

vmarkulin@tvz.hr



• **Miroslav Radaković** – rođen je 1965. u Zagrebu, gdje je završio Srednju tehničku školu “Nikola Tesla” te diplomirao na studiju brodogradnje Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Dvadeset

i dvije godine je radio u Brodarskom institutu. Od 2018. predavač je na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu gdje izvodi vježbe iz kolegija Metodologija stručnog i istraživačkog rada, Osnove mehanizama, Mehanizama te Mehanika i čvrstoća. Otac je dvoje djece.

Korespondencija • Correspondence

miroslav.radakovic@tvz.hr



• **Ante Zaninović** – rođen je 1962. u Puli gdje je završio gimnaziju “Branko Semelić”. Studirao je i diplomirao 1985. na Mornaričkoj Vojnoj Akademiji u Splitu. Od 1985. – 1990. godine studirao je i diplomirao na

Fakultetu strojarstva i Brodogradnje u Zagrebu. Na FSB-u je 2011.g. obranio magisterij. Dvadeset i osam godina radio je u Brodarskom institutu na raznim pozicijama od mladog istraživača do vodećeg istraživača. Od upravljačkih funkcija vodio je Laboratorij za mjerenje u naravi, Laboratorij za čvrstoću, vibracije i udare. Zadnjih godina bio je pomoćnik direktora za Pomorske tehnologije. Od 2018. radi na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu gdje drži vježbe iz predmeta: Mehanika, Čvrstoća, Mehanika fluida, Elementi strojeva. Drži predavanja iz kolegija Mjeriteljstvo i Upravljanje kvalitetom, a na diplomskom studiju Upravljanje kvalitetom. Objavio više stručnih i znanstvenih radova. Bio je suradnik na nekoliko znanstvenih projekata iz područja istraživanja u brodogradnji.

Korespondencija • Correspondence

ante.zaninovic@tvz.hr